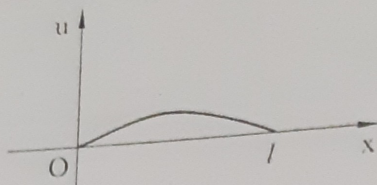


### c) Treperenje ograničene žice

Treperenje ograničene žice dužine  $l$  (sl 3) opisuje sljedeći Mz:



sl 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, t > 0), \quad (10)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad (11)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x). \quad (12)$$

Za rješavanje Mz (10) -(11), (12) primijenimo Furijeov metod (metod razdvojenih promjenljivih). Rješenje tražimo u obliku proizvoda dvije funkcije, od kojih je jedna samo funkcija od  $t$ , a druga samo funkcija od  $x$ , tj.

$$u = T(t)X(x). \quad (13)$$

Zamjenom (13) u (10) dobijamo da je

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x),$$

odnosno

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Kako je na lijevoj strani znaka jednakosti funkcija od  $t$ , a na desnoj strani funkcija od  $x$ , to je jednakost moguća samo onda kada su obje strane jednake konstanti. Označimo tu konstantu sa  $\lambda$ . Dakle,

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Iz (14) slijedi da je

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (14)$$

i

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (15)$$

Kako je  $u|_{x=0} = T(t)X(0) = 0$  to je  $X(0) = 0$ , jer bi se u suprotnom dobilo trivijalno rješenje  $u \equiv 0$  (žica ne vrši nikakva treperenja). Na sličan način se dokazuje da je  $X(l) = 0$ .

Dakle,

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (16)$$

Sada odredimo rješenje Gz: (15)-(16). Interesuju nas netrivialna rješenja. To znači da odredimo sopstvene vrijednosti i sopstvene funkcije Gz (15)-(16).